3rd International Conference on Industrial Engineering and Industrial Management
XIII Congreso de Ingeniería de Organización
Barcelona-Terrassa, 2-4 septiembre 2009

Johnson revisited, ten years later

Ramon Companys[1] , Imma Ribas[1]

[1] Dpto. de Organización de Empresas. Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona. Universidad Politécnica de Catalunya. Av. Diagonal, 647, 08028. Barcelona. ramon.companys@upc.edu , imma.ribas@upc.edu

Palabras clave: Teorema de Johnson, Algoritmo de Johnson, Transitividad

1. Introducción

1954 fue un año memorable, S. M. Johnson publicó su artículo pionero sobre la programación en contexto *flow-shop*. Enunció dos lemas, que convenientemente aderezados, tal como aparecen Conway et al. (1967), poseen un ámbito bastante general. También enunció un teorema destinado a caracterizar la solución del problema $F2||C_{max}$ cuando las máquinas y piezas están disponibles en el instante 0. El lema 1 permite limitar la consideración a los programas que mantienen la misma secuencia en ambas máquinas, y el teorema define una relación tal que toda secuencia que la cumple es óptima, sin poner en duda que otras secuencias que no la cumplan puedan ser óptimas también. En su forma definitiva dicha relación es: si min $\{p_{1,h} , p_{2,i}\}$ < min $\{p_{2,h} , p_{1,i}\}$ entonces h precede a i en la secuencia. Donde $p_{j,i}$ representa el tiempo de operación de la pieza i en la máquina j.

De hecho, en su exposición, Johnson considera implícitamente que las piezas h e i ocupan posiciones contiguas en la secuencia, y muestra que si la pareja (h, i) incumple la relación indicada, permutándolas (y por tanto haciéndola cumplir para dicha pareja) el valor C_{max} no empeora (y algunas veces mejora). Obviamente, para asegurar que mediante permutaciones de este tipo a partir de una secuencia cualquiera se alcanza una secuencia única, salvo tal vez por algunas piezas cuyas posiciones son intercambiables ("*except for some indifferent elements*") debe mostrar que la relación es transitiva. Es lo único que permitiría garantizar que en una permutación no óptima existiría siempre una pareja de piezas contiguas h e i, con h situada antes que i, y tales que min $\{p_{1,h} , p_{2,i}\}$ > min $\{p_{2,h} , p_{1,i}\}$. Efectivamente el Lema 2 de Johnson (1954) afirma que la relación es transitiva.

Curiosamente el llamado algoritmo de Johnson (1954), que Johnson también presenta en su artículo bajo el nombre de *working rule*, no parece explotar las posibilidades que ofrece la relación. El algoritmo conduce a una secuencia que satisface las condiciones del teorema, pero a veces hay secuencias que satisfacen dichas condiciones y que no pueden ser halladas mediante el algoritmo. Consideramos que el algoritmo define por sí mismo una relación más exigente que la de Johnson, que para fijar ideas denominamos *relación de French* por haber hallado su formalización explícita en French (1982).

Esta aparente paradoja y alguna experiencia computacional poco afortunada nos llevó a revisar el texto de Johnson (1954). El punto clave para demostrar el teorema es el lema 2, o sea la transitividad. Para lograrlo, Johnson considera 4 casos, los tres primeros no presentan dificultades pero el cuarto sí. Johnson concluye que existe transitividad salvo, tal vez, si se producen determinadas circunstancias excepcionales. Desgraciadamente la *Loi de La Tartine* (conocida en algunas latitudes como *Murphy's Law*) garantiza la aparición de las circunstancias excepcionales si los efectos que producen son desagradables, y en nuestras experiencias computacionales aparecieron. Debemos concluir que la relación no es transitiva al 100 %. Seguramente existen versiones relajadas de la relación de transitividad, pero para que el enunciado se convierta en teorema, la demostración exige que la transitividad sea pura y dura; y la transitividad pura y dura es como la traición o la virginidad, no se puede ser un poco traidor o casi virgen (Morán (2004)). Por tanto el enunciado se mantiene como conjetura, a pesar de ser cierto, ya que no queda demostrado en el artículo original.

Los textos en los que hemos estudiado algunos de nosotros no son más felices al presentar el tema salvo honrosas excepciones como French (1982) y los que siguen su escuela, aunque en el fondo no demuestran el teorema de Johnson sino una cosa distinta. Hemos revisado los correspondientes a Conway *et al.* (1967), White (1969), Baker (1974), Bellman *et al.* (1982), Monmma and Rinnooy Kan (1983), Carlier y Chrétienne (1988), Pinedo (1995), Brucker (1998), Esquirol y Lopez (2001) entre otros. Todos escurren el bulto con mayor o menor elegancia, aunque la palma se la lleva Baker (1974). Suponemos que no osaban decir nada que pudiera considerarse una oposición herética al dogma.

Hace diez años casi exactamente, los que indica el título, escribimos una Nota de Trabajo interna sobre el tema (Companys and Bautista (1999)). No osamos utilizar mayor empaque ni difusión, dado que algunas vacas sagradas podrían sentirse agraviadas. Transcurridos diez años hemos modificado ligeramente nuestros puntos de vista y hemos adquirido más coraje (o inconsciencia).

En el apartado 2 presentamos los orígenes de la situación y la que denominamos condición de Johnson con sus implicaciones, mientras que en el apartado 3 se describe la condición de French. En el apartado 4 realizamos una visión panorámica de lo que dicen los diversos autores, más o menos clásicos, y en el apartado 5 presentamos la que denominamos condición de Johnson ampliada, que permite demostrar finalmente, mediante un rodeo la conjetura. En el apartado 6 describimos un algoritmo basado en la condición anterior y finalmente en el apartado 7 incluimos algunos comentarios finales.

Hemos omitido las demostraciones, algunas de las cuales se encuentran en muchos textos, y otras son triviales a la vista de aquellas. En cambio hemos utilizado frecuentemente contra-ejemplos en la convicción de que la existencia de un cisne negro es suficiente para desbaratar, sin lugar a dudas, la creencia que todos los cisnes son blancos. Hemos intentado que todas las citas fuesen textuales salvo retoques en la notación, para homogeneizarla con la utilizada en este trabajo.

2. Condicion de Johnson

El problema bajo consideración es el $F2||C_{max}$, con todas las piezas y máquinas disponibles en el instante 0, y denominamos $p_{j,i}$ a la duración de la operación de la pieza i (i = 1, 2, ... , n) en la máquina j (j = 1, 2). Buscamos, en razón del primer lema, una única secuencia para ambas máquinas, ya que siempre existe una solución óptima de este tipo, lo que no descarta la posible existencia en algunos ejemplares de soluciones óptimas con secuencias diferentes en ambas máquinas. Johnson afirma que son óptimas las permutaciones en las que para cada pareja de piezas h e i tales que: min $\{p_{1,h}, p_{2,i}\}$ < min $\{p_{2,h}, p_{1,i}\}$, la pieza h precede a la pieza i, pero pueden existir soluciones óptimas que no cumplan la condición. Si min $\{p_{1,h}, p_{2,i}\}$ =

min {$p_{2,h}$, $p_{1,i}$} la posición relativa de *h* e *i* en la secuencia no queda definida, *h* puede estar antes que *i* o *i* antes que *h*, y en algunos casos esto puede llevar a la existencia de varias secuencias óptimas.

En el ejemplar 1 del problema F2||C_{max}, Tabla1, muestra la existencia de soluciones óptimas que no cumplen esta condición. Las permutaciones {1,2,3}, {1,3,2} y {2,1,3} son óptimas, con C_{max} = 9, y sin embargo la tercera no satisface la condición para las dos primeras posiciones pues min {$p_{1,2}$, $p_{2,1}$} = min {2, 3} = 2; min {$p_{1,1}$, $p_{1,1}$} = min {2,1 } = 1.

Tabla 1. Ejemplar 1 del problema F2||Cmax

i	1	2	3
$\mathbf{p_{1,i}}$	1	2	4
$\mathbf{p_{2,i}}$	3	2	2

Las relaciones anteriores no se refieren exclusivamente a piezas que ocupan posiciones contiguas. En el ejemplar 2 siguiente, Tabla 2, la permutación {1,2,3} satisface la condición de Johnson entre las parejas contiguas:

posición 1 – posición 2: min { 26 , 20 } = 20 = min { 20 , 20 }
posición 2 – posición 3: min { 20 , 30 } = 20 = min { 20 , 31 }

pero no entre la primera y tercera piezas:

posición 1 – posición 3: min { 26 , 30 } = 26 > min { 20 , 31 } = 20

en consecuencia no podemos afirmar que su C_{max} = 107 sea mínimo; en efecto la permutación {3,2,1}, que satisface la condición entre las tres parejas, tiene un valor de C_{max} = 101.

Tabla 2. Ejemplar 2 del problema F2||Cmax

i	1	2	3
$\mathbf{p_{1,i}}$	26	20	31
$\mathbf{p_{2,i}}$	20	20	30

La falta de transitividad es causada por la existencia de la pieza 2, en que $p_{1,2} = p_{2,2}$ = 20, que lleva directamente al ya mencionado Caso 4. Johnson, que lo sabía, escribe "*Then $p_{1,2} = p_{2,2}$ and we have item 2 indifferent to item 1 and item 3. In this case, item 1 may or may not precede item 3, but there is no contradiction to transitivity as long as we order item 1 and item 3 first and then put item 2 anywhere*". En otras palabras, para garantizar que la secuencia sea óptima, debe verificarse que la relación la satisfacen la pieza 1 y la pieza 3.

Pero, por otra parte, aunque 2 no induce orden respecto a 1 o 3 y puede situarse en cualquier posición, esto es cierto respecto a 1 o 3 pero no respecto a otras piezas. En el ejemplar 3, Tabla 3, la pieza 4 no induce orden respecto la 3 ni la 5 (sus contiguas) ni tampoco respecto a la 2, sin embargo, en virtud de la condición de Johnson, 1 debe preceder a 4 y 4 debe preceder a 6.

Tabla 3. Ejemplar 3 del problema F2||Cmax

i	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{p_{1,i}}$	15	22	31	20	27	25
$\mathbf{p_{2,i}}$	18	25	30	20	25	18

En consecuencia creemos que el enunciado del teorema de Johnson podría quedar como sigue (tomada en parte de Carlier et al., (2004)):

Teorema de Johnson: En el problema F2||C_{max}, con todas las piezas y máquinas disponibles en el instante 0, limitando las soluciones a aquellas que utilizan una única secuencia para ambas máquinas:

> *If min {$p_{1,h}$; $p_{2,i}$} $\leq$ min {$p_{2,h}$; $p_{1,i}$} then there exist and optimal schedule for the two-machine flow shop scheduling problem in which job h precedes job i.*

Para simplificar la exposición enunciamos la definición siguiente: Diremos que dos piezas *h* e *i* situadas en una secuencia con *h* en una posición anterior (no necesariamente inmediata) a *i* satisfacen la condición o relación de Johnson [CJ] si min {$p_{1,h}$, $p_{2,i}$} ≤ min {$p_{2,h}$, $p_{1,i}$}.

Es fácil demostrar que si *h* e *i* están en posiciones contiguas de una secuencia, *h* precediendo a *i*, y se incumple la condición min {$p_{1,h}$, $p_{2,i}$} > min {$p_{2,h}$, $p_{1,i}$}, al permutar las piezas la nueva secuencia tiene un valor C_{max} igual o inferior al de la secuencia original, mientras que si min {$p_{1,h}$, $p_{2,i}$} = min {$p_{2,h}$, $p_{1,i}$}, la permuta no altera el valor C_{max}. Desgraciadamente no ocurre necesariamente lo mismo si *h* e *i* no están en posiciones contiguas. En el ejemplar 4, Tabla 4, si partimos de la secuencia {1,2,3} el valor C_{max} = 23. Comparando las piezas 1 y 3 (que no ocupan posiciones contiguas) obtenemos: min {5, 7} = 5 > min {4, 8} = 4. La secuencia no es óptima, pero si permutamos las piezas consideradas (secuencia {3,1,2) el valor C_{max} empeora (C_{max} = 24). La secuencia óptima es {2,3,1} con C_{max} = 22.

Tabla 4. Ejemplar 4 del problema F2||Cmax

i	1	2	3
$p_{1,i}$	5	3	8
$p_{2,i}$	4	5	7

La demostración del Teorema podría realizarse de acuerdo a las tres fases siguientes:

F1: demostrando que siempre existe una permutación (por lo menos) que cumple la condición,

F2: demostrando que cualquier permutación puede transformarse, en un número finito de pasos, en una de las que cumple la condición, sin empeorar en toda su evolución el valor de C_{max},

F3: demostrando que todas las permutaciones que cumplen la condición tienen el mismo valor C_{max}.

Alternativamente, podemos obviar F3, si demostramos en F2 que la transformación conduce en todos los casos a la misma permutación que cumple la condición. Esta es la vía elegida por nosotros más adelante. F1 parece a primera vista trivial, pero la posibilidad de empates y los problemas con la transitividad exigen un cierto cuidado, una demostración suficiente es la del apartado 3. La demostración completa del Teorema la presentamos en el apartado 5.

En cambio no resulta complicado establecer que pueden existir varias permutaciones que satisfagan las condiciones del Teorema, si está garantizado que existe por lo menos una que lo hace. En efecto, si en una permutación que satisface las condiciones del Teorema existen dos piezas en posiciones contiguas *h* e *i* tales que min {$p_{1,h}$, $p_{2,i}$} = min {$p_{2,h}$, $p_{1,i}$}, dichas piezas pueden permutarse obteniéndose una secuencia distinta que también satisface las condiciones del Teorema. Ambas secuencias, la original y la transformada, tienen el mismo valor C_{max}.

3. La working rule sublimada: Condicion de French.

El enfoque de French [CF], que éste atribuye a Rinnooy Kan (1976) es distinto. Afirma que una permutación, por ejemplo {1, 2, ..., n}, que cumple:

$\min \{ p_{1,h}, p_{1,h+1}, \ldots ,p_{1,i}, p_{2.h}, p_{2,h+1}, \ldots , p_{2,i} \} = \min \{ p_{1,h}, p_{2.i} \} \;\; \forall\, h, i$ con $h < i$ es óptima.

La demostración autónoma de este resultado puede verse en French (1982). Una secuencia que satisfaga [CF] se puede obtener mediante la *working rule* y cumple también [CJ]. Obviamente siempre existe una permutación que satisface [CF], por tanto siempre existe una permutación que cumple [CJ], lo que garantiza F1.

La condición de French implica la condición de Johnson, pero el recíproco no es cierto, una permutación puede cumplir la condición de Johnson (y ser óptima) sin cumplir la condición de French. Sea el siguiente ejemplar $3/2/F/F_{max}$ (Tabla 5):

Tabla 5. Ejemplar 5 del problema $3/2/F/F_{max}$

i	1	2	3
$\mathbf{p_{1,i}}$	31	20	27
$\mathbf{p_{2,i}}$	30	20	25

La permutación {1, 2, 3} cumple la condición de Johnson:

$$\min \{ 31 , 20 \} = 20 = \min \{ 30 , 20 \}$$
$$\min \{ 31 , 25 \} = 25 < \min \{ 30 , 27 \} = 27$$
$$\min \{ 20 , 25 \} = 20 = \min \{ 20 , 27 \}$$

sin embargo no cumple la de French:

$$\min \{ 31, 20, 27, 30, 20, 25 \} = 20 < \min \{ 31 , 25 \} = 25$$

Por tanto {1,2,3} no puede obtenerse mediante la *working rule*. Existen dos permutaciones que cumplen la condición de French, son {2,1,3} y {1,3,2}; estas más la anterior son óptimas con $C_{max} = 106$. Por consiguiente la condición de Johnson es más general que la de French y la *working rule*.

4. Subterfugios en las obras clasicas para eludir los escollos de la transitividad.

En varios textos clásicos se utiliza un argumento falaz para demostrar la optimalidad de la condición de Johnson. Directa (Baker (1974)) o indirectamente (Conway et al. (1967)) asumen que en una permutación que no cumple la condición de Johnson existen dos piezas contiguas *h* e *i* tales que: $\min \{p_{1,h} , p_{2,i}\} > \min \{p_{2,h} , p_{1,i}\}$, lo cual ha quedado desmentido en el contraejemplo asociado al ejemplar 2. En Baker (1974) página 145 puede leerse:

"Now consider a schedule S, which does not satisfy the ordering prescribed by Theorem 6.1. This means that there exist a pair of adjacents jobs h and i, with i following h, such that $\min \{p_{1,h} , p_{2,i}\} > \min \{p_{2,h} , p_{1,i}\}$"

En todos los casos la argumentación necesita apoyarse en la transitividad de la relación que garantizaría la existencia de este par de piezas contiguas que no satisfacen [CJ], pero la transitividad no está asegurada en los casos similares a los del Ejemplar 2.

Es popular repetir la afirmacióna de que las piezas anómalas (tales que $p_{1,i} = p_{2,i}$) no inducen orden respecto a sus contiguas y que puede situarse en cualquier posición, lo que el contraejemplo asociado al ejemplar 3 ha puesto en cuarentena. Sin embargo los autores afirman:

"Theorem 5-3 (Johnson 1954): In an n/2/F/F_{max} problem with all jobs simultaneous avalaible, job j should precede job j+1 if $\min\{p_{1,j}, p_{2,j+1}\} < \min\{p_{2,j}, p_{2,j+1}\}$.

The proof is in two parts. The first shows that sequencing according this inequality minimizes the maximum of the Y_k's; the second illustrates that the relation is transitive so that a complete schedule is in fact specified by this pair wise ordering. ......

***Transivity of Relationship**.We must show that for three jobs, h, i and j, if:*

$\min\{p_{1,h}, p_{2,i}\} \le \min\{p_{2,h}, p_{1,i}\}$ *and* $\min\{p_{1,i}, p_{2,j}\} \le \min\{p_{2,i}, p_{1,j}\}$ *then*
$\min\{p_{1,h}, p_{2,j}\} \le \min\{p_{2,h}, p_{1,i}\}$, *except possibly for cases in which the relationship is an equality between booth h and i and i and j".* (Conway et al. (1967, páginas 86-87)).

(La parte omitida corresponde a una demostración sobre el comportamiento de Cmax al permutar dos piezas contiguas).

"The case 3 in the above proof occurs only when the assumed inequalities are booth equalities and $p_{1,i} = p_{2,i}$ holds. And in this case the orders of two jobs h, i and two jobs i, j are arbitrary respectively. We may regard that job h precedes job j". (Bellman et al. (1982, páginas 148-149)).

Los hay más sutiles. Monma and Rinnooy Kan (1983, página 107) utilizan un grafo de precedencias como representación y el cálculo del camino crítico para evaluar C_{max}:

"An optimal permutation can be found in O(n·log n) time by applying Johnson's Rule; a permutation is optimal if job h precedes job i whenever Johnson's Condition:

$\min\{p_{1,h}, p_{2,i}\} < \min\{p_{2,h}, p_{1,i}\}$ *is satisfied. A simple proof is provided below. An optimal permutation always exists since Johnson's Condition can be seen to be transitive.*

We note that an optimal permutation ordered by Johnson's Rule has the property that an optimal permutation for any subset of the jobs is given by the order of these jobs in the original permutation. Also, the worst possible permutation is obtained by reversing the order obtained by Johnson's Rule. The critical-path approach leads to a simple proof of Johnson's result. Consider the graph representing a permutation with job i immediately preceding job h as shown in figure 2(a). Interchanging these jobs, as shown in figure 2(b), does not increase the completion time of the schedule if the weight of no critical path is increased, i. e., if:
$\max\{p_{1,h} + p_{1,i} + p_{2,i}, p_{1,h} + p_{2,h} + p_{2,i}\} \le \max\{p_{1,i} + p_{1,h} + p_{2,h}, p_{1,i} + p_{2,i} + p_{2,h}\}$. *This is easily seen to imply Johnson's Condition".*

Carlier y Chrétienne (1988, páginas 215-217) prefieren utilizar un lenguaje más formalista:

"Considerons maintenant un sequencement S associé à un ordre total non compatible avec [CJ], il existe deux travaux h et i tels que:

a) h et i sont deux tâches consécutives sur la machine 1;
b) $\min\{p_{1,h}, p_{2,i}\} \ge \min\{p_{2,h}, p_{2,i}\}$

Soit alors T le sequencement obtenu par échange des tâches h et i, *i.e.: si $j \notin \{i,j\}$ $S^{-1}(j)=T^{-1}(j)$, $T^{-1}(h)=k+1$, $T^{-1}(i)=k$ avec $k=S^{-1}(h)$. .....*

Nous terminons la démonstration en remarquant:

> *a) que l'on peut passer d'un sequencement quelconque non compatible avec [CJ] a un sequencement compatible avec [CJ] par une suite d'au plus $n\cdot(n-1)/2$,changes améliorants.*
>
> *b) que tous les séquencements compatibles avec [CJ] ont le même délai; ils ne diffèrent, en effet, entre eux que par des échanges de travaux h et i pour lesquels*
>
> *$\min\{ p_{1,h} , p_{2,i} \} = \min\{ p_{2,h} , p_{2,i} \}$ laissant invariant le critère.QED".*

(la parte omitida corresponde a una demostración sobre el comportamiento de C_{max} al permutar dos piezas contiguas).

Aunque el más espectacular se encuentra en Baker (1974) en las páginas 146 y 148:

"To complete de proof, the second fase is to demonstrate the transivity of the job ordering. In other words, supose $\min\{p_{1,h} , p_{2,i}\} \leq \min\{p_{2,h} , p_{1,i}\}$ and $\min\{p_{1,i} , p_{2,j}\} \leq \min\{p_{2,i} , p_{1,j}\}$. Then it will always be true that min $\min\{p_{1,h} , p_{2,j}\} \leq \min\{p_{2,h} , p_{1,i}\}$. (The details of this part of the proof are given as Exercise 3.1)….

EXERCISE 3.1. Show that Johnson's rule is transitive".

White (1969) y Bellman et al. (1982, páginas 71-74) adjuntan una deducción, utilizando la programación dinámica, sobre la conveniencia de cumplir la condición de Johnson al colocar dos piezas en posiciones contiguas, lo cual puede deducirse por otros procedimientos como han hecho otros autores. Lamentablemente esta condición no es necesaria ni suficiente, ni queda demostrado que todas las permutaciones que la cumplan son óptimas, ni que no haya permutaciones óptimas que no la cumplan, a pesar de la afirmación de White (1969, página 73):

"This condition for job h to precede job i is independent of E and t and hence is a sufficient condition for h to precede i anywhere in the sequence if they are adjacent".

Pinedo (1995), muy prudentemente, habla de la regla SPT(1)-LPT(2). Dado que es muy aficionado a enunciar teoremas propone uno (pag. 98) que coincide con el enunciado por French. Lo mismo hace Brucker (1998) mediante un interesante argumento de reducción al absurdo. Ambos autores demuestran que una secuencia construida según la *working rule* es óptima, pero no que una construida según [CJ] lo sea.

Parker (1995) enuncia la condición [CJ] pero da por supuesto que la relación que induce es transitiva, aunque ni se lo plantea. Chu y Proth (1996) eluden el tema, mientras que Esquirol y Lopez (2001) enuncian el teorema de Johnson sin demostración. Blazewicz et al. (2001, pág. 250-252) proponen un enunciado muy correcto del teorema, utilizan el camino crítico para caracterizar C_{max}, demuestran la propiedad para dos posiciones contiguas y pasan a las cosas serias "*It remains to verify the transivity…*". Enumeran 16 casos de los que 12 son triviales y en los restantes emiten un dictamen en el más puro estilo del coro de los doctores (Ramos Carrión et al. (1891)) "*…imply that i may precede j or j may precede i…*". Carlier et al. (2004) dan un buen enunciado, pero eluden toda demostración.

Potts y Strusevich (2009) enuncian correctamente el teorema, pero afirman que Johnson lo demuestra "*Moreover, Johnson (1954) proves that there exists a optimal schedule in which a job h is sequenced earlier than another job i, if min* $\{p_{1,h}, p_{2,i}\} \leq$ *min* $\{p_{2,h}, p_{2,i}\}$. *The most common algorithm that is based on this property is as follows: …*". Ni Johnson aporta una demostración completamente satisfactoria, ni la *working rule* está basada, *estrictu sensu*, en [CJ].

5. Condición de Johnson ampliada.

Las dificultades apuntadas se producían al intentar demostrar la transitividad de la condición de Johnson, y la perturbación del procedimiento provenía de los empates, de aquellas parejas de piezas tales que $\{p_{1,h}, p_{2,i}\} = \min \{p_{2,h}, p_{1,i}\}$. Vamos a escapar de esta dificultad añadiendo una condición que impida toda ambigüedad en el caso de empate.

Definición: Diremos que la pieza h domina a la pieza i y escribiremos $h \to i$ si se cumple cualquiera de las tres condiciones siguientes:

$$\min\{ p_{1,h}, p_{2,i} \} < \min \{ p_{2,h}, p_{1,i} \} \qquad \text{[CJ0]}$$
$$\min\{ p_{1,h}, p_{2,i} \} = \min \{ p_{2,h}, p_{1,i} \} \text{ y } p_{1,h} - p_{2,h} < p_{1,i} - p_{2,i} \qquad \text{[CA1]}$$
$$\min\{ p_{1,h}, p_{2,i} \} = \min \{ p_{2,h}, p_{1,i} \} , p_{1,h} - p_{2,h} = p_{1,i} - p_{2,i} \text{ y } h < i \qquad \text{[CA2]}$$

Al conjunto de las expresiones [CJ0], [CA1] y [CA2] las denominamos condición de Johnson ampliada. La adición de la expresión [CA2] se ha realizado solamente a efectos de la demostración y podría suprimirse.

Teorema: Si $h \to i$ y $i \to k$ entonces $h \to j$. La relación definida por [CJ0], [CA1] y [CA2] es transitiva.

La demostración puede encontrarse en Companys y Bautista (1999), en la que sólo hace falta enumerar 9 casos.

Lema 1: El orden $h \to i$ es completo. Dadas dos piezas h e i o bien $h \to i$ o bien $i \to h$. En consecuencia existe una única secuencia en donde las piezas están situadas de acuerdo al orden.

La demostración es simple a partir de la definición de $h \to i$ y la transitividad.

Lema 2: La secuencia definida por el orden es óptima para el problema $F2||C_{max}$ en las condiciones indicadas.

Si una secuencia no satisface $h \to i$ para todas las posiciones, existen piezas situadas en prosiciones contiguas que no cumplen dicha relación. Permutando dichas piezas C_{max} de la secuencia no empeora. Repitiendo la operación hasta que todas las piezas satisfagan la relación $h \to i$ se alcanzará una secuencia única cuyo valor C_{max} será mínimo.

Relajando las condiciones impuestas por [CA1] y [CA2] alcanzamos la demostración del Teorema de Johnson (enunciado en el apartado 2) aunque ahora las secuencias definidas por la condición menos exigentes pueden ser varias (una de ellas es la definida por la condición ampliada). Una primera evidencia la obtenemos observando que la relajación de [CA2] equivale a una renumeración de las piezas, y que por tanto la secuencia resultante es óptima.

Toda secuencia que satisfaga las condiciones del Teorema de Johnson puede ser transformada en la secuencia que hemos definido, la única acorde al orden establecido por la relación $\rightarrow$, en un número finito de pasos permutando piezas situadas en posiciones contiguas tales que $\min\{ p_{1,h}, p_{2,i}\} = \min \{p_{2,h}, p_{1,i}\}$. Dichas permutas no modifican el valor C_{max}. Por tanto toda secuencia que satisface las condiciones del Teorema de Johnson es óptima.

6. Algoritmo.

Las conclusiones del párrafo anterior permiten definir un algorimo para encontrar una secuencia óptima en un ejemplar del problema $F2||C_{max}$. Se construye una secuencia cualquiera y se examinan sistemáticamente dos posiciones contiguas. Si las piezas situadas en estas posiciones incumplen [CJ0] o [CA1] se permutan. El algoritmo finaliza cuando todas las parejas de piezas situadas en posiciones contiguas satisfacen [CJ0] o [CA1]. Este es el algoritmo que hemos venido utilizando durante muchos años, y es $O(n\cdot \log n)$.

7. Conclusiones.

Hemos presentado algunas lagunas existentes en la demostración tradicional del Teorema de Johnson, que hemos finalmente eliminado mediante la condición de Johnson ampliada. También hemos presentado un algoritmo para encontrar una secuencia óptima en un ejemplar del problema $F2||C_{max}$.

Este trabajo está dedicado a aquellos alumnos a los que en el pasado explicamos la verdad, pero no toda la verdad.

Referencias

Baker, K.R. (1974). Introduction to sequencing and scheduling. Wiley

Bellman, R.E., Esogbue, A.O., Nabeshima, I. (1982). Mathematical aspects of scheduling and applications. Pergamon Press

Blazewicz, J.; Ecker, K.H.; Pech, E.; Schmidt, C.; Weglarz. (2001). Scheduling Computer and Manufacturing Processes; Springer (2nd edition)

Brucker, P. (1998). Scheduling Algorithms; Springer (2nd edition)

Carlier, J. Chrétienne, P. (1988). Problèmes d'ordonnancement. Masson

Carlier, J.; Péridy, L.; Pinson, E.; Rivreau. D. (2004). Elimination rules for job-shop scheduling: Overview and extensions, in Leung, J. Y-T. (ed) Handbook of Scheduling; Chapman & Hall

Chu, C.; Proth, J.-M. (1996). L'ordonnancement et ses applications; Masson

Companys, R.; Bautista, J. (1999). Retorno al teorema de Johnson. Document Intern de Treball, D.I.T. 99/03, DOE-ETSEIB

Conway, R.W.; Maxwell, W.L.; Miller, L.W. (1967). Theory of Scheduling. Addison Wesley

Esquirol, P,; Lopez, P. (2001) "Concepts et méthodes de base en ordonnancement de la production, in Lopez, P; Roubellat, F., Ordonnancement de la Production; Hermes

French, S. (1982). Sequencing and Scheduling: An Introduction to Mathematics of the Job-Shop. Ellis Horwood.

Johnson, S.M. (1954). Optimal two-and three-stage production schedules with set-up time included. Naval Research Logistic Quarterly Vol.1, pp.61-68; reproducido en Muth, J. F.; Thompson, G. L (1963). Industrial Scheduling, Prentice-Hall, pp. 15-16

Monma, C.L.; Rinnooy Kan, A.H.G. (1983). A concise survey of efficiently solvable cases of the permutation flow-shop problem. RAIRO, Vol. 17, no. 2, pp. 105-119

Morán, G. (2004). El que gritó traidor. Sabatinas Intempestivas, La Vanguardia; 18-09-04, pp. 24

Parker, R. G. (1995). Deterministic Scheduling Theory, Chapman & Hall

Pinedo, M. (1995). Scheduling: Theory, Algorithms and Systems; Prentice Hall

Potts, CM.; Strusevich,VA. (2009). Fifty years of scheduling: A survey of milestones. Journal of the Operational Research Society, Vol. 60, supplement 1, pp. 41-68.

Ramos Carrión, M. Aza, V., Chapí, R. (1891). Juzgando por los síntomas en El Rey que Rabió; Teatro de la Zarzuela de Madrid.

Rinnooy Kan, A.H.G. (1976) Machine Scheduling Problems: Classifications, Complexity and Computations. Martinus Nijhoff

White, D.J. (1969). Dynamic Programming. Oliver and Boyd